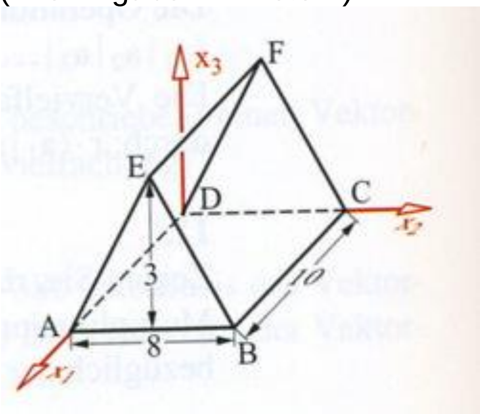
Übungsklausur Geometrie 1 (Tribüne)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben sind die Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

a) Zeige, dass diese Geraden eine Ebene E aufspannen.
b) Gib eine Parametergleichung von E an. (3 VP)

2) Die Punkte A, B, C, D, E und F bilden die Eckpunkte eines Satteldachs (Alle Angaben in Metern).



a) Bestimme die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E und F.
b) In der Mitte M der Dachfläche BCFE soll eine Antenne befestigt werden. Welche Koordinaten hat der Punkt M?
c) Entlang der Strecke $\overline{MA}$ verläuft das Kabel der Antenne. Ist dieses Kabel länger oder kürzer als 8m? Begründe Deine Antwort. (3 VP)

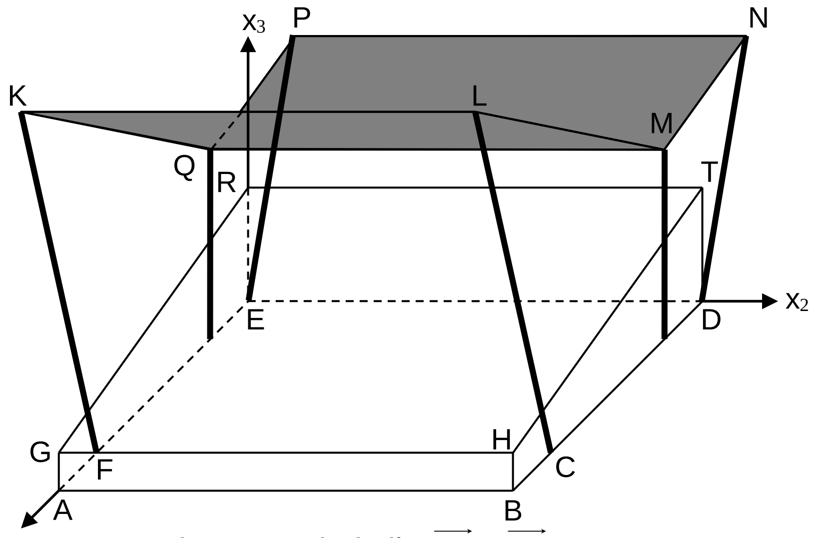
3) Bestimme den Schnittpunkt der Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit der Ebene } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ (3 VP)

4) Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F: 2x_1 + x_3 = 4$.
a) Veranschauliche die Ebenen mit Hilfe ihrer Spurgeraden in einem gemeinsamen Koordinatensystem.
b) Zeichne die Schnittgerade von E und F in das Koordinatensystem ein.
c) Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden von E und F rechnerisch. (4 VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (Tribüne)
Wahlteil (mit WTR und Formelsammlung)

Über das Internet kann man bei Bedarf mobile Tribünen mit überdachten Sitzplätzen mieten. Die Abbildung zeigt eine vereinfachte Skizze einer solchen Tribüne.
Das Tribünendach besteht aus zwei Rechtecken.
Die Sitzfläche und die Bodenfläche der Tribüne sind ebenfalls rechteckig.
Folgende Punkte sind gegeben:
B(6|8|0); E(0|0|0); F(5|0|0);
G(6|0|1); H(6|8|1); R(0|0|3);
T(0|8|3); L(7|8|6); M(1|8|5);
N(-1|8|h); P(-1|0|h); Q(1|0|5).
(Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.)



a) (1) Gib die Koordinaten der Punkte A, C, D und K an, wobei gilt: $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{LC}$.
Die Ebene E_1 enthält die Tribünenfläche GHTR.
(2) Weise durch Punktprobe nach, dass diese Ebene durch die Gleichung $E_1: x_1 + 3x_3 = 9$ beschrieben werden kann.
Die Ebene E_2 enthält die Dachfläche MNPQ und verläuft parallel zu E_1.
(3) Gib für E_2 die Ebenengleichung in Koordinatenform an.
(4) Ermittle jeweils die x_3-Koordinate der Punkte N und P. (5 VP)

b) Im Inneren der Tribüne verlaufen von B zu R bzw. von A zu T zwei Streben zur Stabilisierung.
(1) Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Streben. Gib, falls möglich deren Schnittpunkt an.
Außerdem verläuft von der Mitte des Pfeilers $\overline{LC}$ eine Strebe zum Punkt M.
(2) Wie lang ist diese Strebe? (4 VP)

c) Um 12.00 Uhr regnet es. Da es windstill ist, fallen die Tropfen parallel zur x_3- Achse.
(1) Ermittle den Inhalt der Fläche in der x_1x_2-Ebene, auf die kein Regen fällt.
Die Rinne $\overline{QM}$ enthält ein Loch.
(2) In welcher Entfernung von der Kante $\overline{RT}$ muss ein Zuschauer auf der Tribüne damit rechnen, nass zu werden? (5 VP)

d) Um 14.00 Uhr scheint wieder die Sonne. Der Punkt M wirft dabei auf die Tribünenfläche den Schatten $M'\left(\frac{9}{16} \mid \frac{114}{16} \mid \frac{45}{16}\right)$.
Untersuche, ob der gesamte Schatten der Kante $\overline{LM}$ auf die Tribünenfläche fällt. (3 VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (Tribüne)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) Zu zeigen: Die Geraden haben einen Schnittpunkt

(1) RVen linear abhängig oder unabhängig?

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow k = 3 \\ \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \text{ RVen sind linear unabhängig (0,5P)} \\ \Rightarrow k = 5 \end{matrix}$$

(2) Schnittpunkt?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{(I)} & 2 + s = 3 + 3t \\ \text{(II)} & s = 2 + 4t \\ \text{(III)} & s = 3 + 5t \end{matrix}$$

(II) in (I): $2 + 2 + 4t = 3 + 3t \Leftrightarrow \boxed{t = -1}$ in (II): $\boxed{s = -2}$

t = -1 und s = -2 in (III): $-2 = 3 + 5(-1) \vee$

$\Rightarrow$ Die Geraden schneiden sich in S(0|-2|-2) (1,5P)

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (1P) **3 VP**

2) a) A(10|0|0); B(10|8|0); C(0|8|0); D(0|0|0); E(10|4|3); F(0|4|3) (1P)

b) Mitte von BF: M(5|6|1,5) (1P)

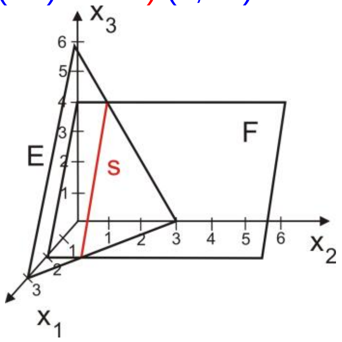
c) $d = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25 + 36 + 2{,}25} = \sqrt{63{,}25} < 8 = \sqrt{64}$ also kürzer als 8m (1P) **3 VP**

3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oder E zuvor in Koordinatenform $E: -x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$)

$\Rightarrow t = 2;\ r = -1;\ s = -4$

S(2 | 4 | 1) **3 VP**

4) a) (2P) und b) (0,5P)



b) Wähle $\boxed{x_1 = t}$ $\Rightarrow \boxed{x_3 = 4 - 2t} \Rightarrow x_2 = -t - \frac{1}{2}(4 - 2t) + 3 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 1}$

$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (1,5P) **4 VP**

Übungsklausur Geometrie 1 (Tribüne)

Lösungen Wahlteil: Seite 1

a) (1) A(6|0|0); C(5|8|0); D(0|8|0); K(7|0|6) (1P)

(2) G in E_1: 6 + 3 = 9 ✓

H in E_1: 6 + 3 = 9 ✓

T in E_1: 9 = 9 ✓

R in E_1: 9 = 9 ✓ $\Rightarrow E_{GHTR} = E_1 : x_1 + 3x_3 = 9$ (1P)

(3) $E_2 : x_1 + 3x_3 = d$, setze M ein: $d = 1 + 3 \cdot 5 = 16$

$\Rightarrow E_2 : x_1 + 3x_3 = 16$ (1,5P)

(4) Setze N bzw. P in E_2 ein: $-1 + 3h = 16 \Leftrightarrow h = \frac{17}{3}$ (1,5P) **5 VP**

b) (1) $g_{BR} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ (0,5P) $g_{AT} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ (0,5P)

RVen sind linear unabhängig (0,5P)

Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 6s = 6 - 6t \Leftrightarrow s = 1 - t \\ \text{(II)} & 8s = 8t \quad \Rightarrow s = t \\ \text{(III)} & 3 - 3s = 3t \end{array}$$

Aus (I) und (II) folgt: $s = \frac{1}{2}; t = \frac{1}{2}$; in (III): $1{,}5 = 1{,}5$ ✓ $\Rightarrow$ Schnittpunkt S(3|4|1,5) (1P)

(2) Mitte von LC: $M_1(6\,|\,8\,|\,3)$ (0,5P)

$$l = \left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{29} \approx 5{,}39 \quad \text{(1P)}$$ **4 VP**

c) (1) $K'(7\,|\,0\,|\,0); L'(7\,|\,8\,|\,0); N'(-1\,|\,8\,|\,0); P'(-1\,|\,0\,|\,0)$ (1P)

$A_{keinRegen} = \overline{K'L'} \cdot \overline{K'P'} = 8 \cdot 8 = 64$ (1P)

(2) Lotgerade zum Boden durch M: $g_{Lot} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0,5P)

Schnitt von Lotgerade mit $E_1 : x_1 + 3x_3 = 9$:

$1 + 3 \cdot (5 + t) = 9 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{3} \Rightarrow S\left(1\,|\,8\,|\,\frac{8}{3}\right)$ (1,5P)

$$\left|\overrightarrow{ST}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-1 \\ 8-8 \\ 3-\frac{8}{3} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{10}{9}} = 1{,}054$$

$\Rightarrow$ Zuschauer wird 1,05m von RT entfernt nass. (1P) **5 VP**

d) Lichtstrahl durch den Punkt L:

$$g_{Licht}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{16} - 1 \\ \frac{114}{16} - 8 \\ \frac{45}{16} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{14}{16} \\ -\frac{35}{16} \end{pmatrix} \quad (1P)$$

Schnittpunkt von g_{Licht} $E_1: x_1 + 3x_3 = 9$:

$$7 - \frac{7}{16}t + 3 \cdot \left(6 - \frac{35}{16}t\right) = 9 \Leftrightarrow 25 - \frac{112}{16}t = 9 \Leftrightarrow 7t = 16 \Leftrightarrow t = \frac{16}{7}$$

in g_{Licht}: $L'(6\,|\,6\,|\,1)$ (1,5P). Dieser Punkt liegt auf der Kante GH,
somit liegt der gesamte Schatten von LM auf der Tribünenfläche. (0,5P) **3 VP**